Blatt 7

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 10.12, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 7.1 (2 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit $\dim V < \infty$ und seien $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei projektive Unterräume. Zeigen Sie das folgende einfache, aber sehr wichtige Prinzip:

$$\dim M_1 \leq \dim M_2 \text{ mit Gleichung genau dann, wenn } M_1 = M_2$$

Aufgabe 7.2 (2 + 3 + 4 + 4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$ verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass $L(P_1, P_2)$ die einzige projektive Gerade die P_1, P_2 enthält ist.

(ii) Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ eine projektive Hyperebene. Seien $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass
$$H = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,|\, a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$
eine projektive Hyperebene ist. Andererseits, zeigen Sie, dass alle projektive Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ diese Form haben.

(iii) Welche der folgenden Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ stimmen überein?
$$Q_1 = [1, 1, 1],\ Q_2 = [-1, 1, 1],\ Q_3 = [3, -3, 3],\ Q_4 = [0, 1, 1],\ Q_5 = [2, 2, 2],\ Q_6 = [-4, -4, -4].$$

(iv) Seien $Q_1, \dots Q_6$ wie oben. Finden Sie Gleichungen für alle die Geraden $L(Q_i, Q_j), Q_i \neq Q_j$.

Aufgabe 7.3 (3 + 3 + 5 + 3 + 3 + 3 + 5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \geq 1$. Wir betrachten ein projektiver Unterraum $M \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Die folgenden Konsequenzen der Dimensionsformel sind sehr nützlich

(i) Sei $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass
$$\dim L(M, P) = \begin{cases} \dim M, & \text{falls } P \in M \\ \dim M + 1, & \text{falls } P \notin M \end{cases}$$

(ii) Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ eine projektive Hyperebene. Zeigen Sie, dass
$$\dim M \cap H = \begin{cases} \dim M, & \text{falls } M \subseteq H \\ \dim M - 1, & \text{falls } M \not\subseteq H \end{cases}$$

Wir wollen zwei geometrische Anwendungen zeigen. Zwei projektive Geraden $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ heißen koplanar wenn es eine projektive Ebene $\Pi \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ gibt, die beide enthält.

(iii) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene projektive Geraden $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ koplanar sind, genau dann, wenn $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. In diesem Fall zeigen Sie, dass $L(L_1, L_2)$ die einzige projektive Ebene ist, die beide enthält.

Seien nun $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ zwei projektive Geraden, so dass $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, und sei $P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K}) \setminus P_1 \cup P_2$. Wir wollen zeigen, dass es eine einzige Linie R gibt, die P enthält und sowohl L_1, L_2 schneidet

(iv) Zeigen Sie, dass $\Pi_i = L(L_i, P), i = 1, 2$ die einzige projektive Ebenen sind, so dass $P \in \Pi_i, L_i \subseteq \Pi_i$.

(v) Zeigen Sie, dass $\Pi_1 \neq \Pi_2$.

(vi) Zeigen Sie, dass $R = \Pi_1 \cap \Pi_2$ eine Gerade ist, die koplanar zu beide L_1, L_2 ist.

(vii) Zeigen Sie, dass R die einzige Gerade ist,so dass $P \in R, R \cap L_1 \neq \emptyset, R \cap L_2 \neq \emptyset$.

Die ganze Aufgabe kann rein projektiv-geometrisch gelöst werden, man muss die Unterräume nicht in der Form $\mathbb{P}(W)$ schreiben und dann mit W arbeiten. Wenn Sie das tun wollen, ist das natürlich in Ordnung.